



PIBIC/CNPq/UFPG-2010

ESTADOS COERENTES EM MECÂNICA QUÂNTICA

Alberto Silva Pereira¹, Rafael de Lima Rodrigues², Aécio Ferreira de Lima³

RESUMO

Nosso objetivo com este trabalho foi obter as soluções da equação de Schrödinger numa base constituída de estados coerentes para o hamiltoniano do oscilador harmônico quântico, tendo a frequência dependente do tempo, além de calcular a fase de Berry, numa base constituída de estados coerentes canônicos (ECC) e numa base de estados coerentes generalizados (ECG). A nossa discussão central baseou-se no método de invariante desenvolvida por Lewis e Riesenfeld, que tem como objetivo encontrar uma relação entre os autoestados do invariante e as soluções da equação de Schrödinger dependente do tempo. De um modo geral constatamos que os estados coerentes generalizados são operacionalmente mais úteis que os estados canônicos, no que diz respeito aos cálculos realizados para se obter o espectro de energia do oscilador harmônico quântico.

Palavras-Chave: estados coerentes, fase de Berry, invariantes

Coherent States in Quantum Mechanics

ABSTRACT

Our goal with this study was to obtain the solutions of the Schrödinger equation in a basis consisting of coherent states for the Hamiltonian of the quantum harmonic oscillator, with frequency dependent on time, calculate the Berry phase, a base consisting of canonical coherent states (ECC) on a basis of generalized coherent states (GCS). Our main discussion was based on the invariant method developed by Lewis and Riesenfeld, which aims to find a relationship between the eigenstates of the invariant and the solutions of the Schrödinger equation dependent on time. In general we found that the generalized coherent states are more operationally useful than the canonical states, with regard to the calculations performed to obtain the energy spectrum of the quantum harmonic oscillator.

Keywords: coherent states, Berry's phase, invariant

¹ Aluno do Curso de Bacharelado em Física, Unidade Acadêmica de Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail: albertoufpg@hotmail.com

² Física, Professor Doutor, Unidade Acadêmica de Educação, UFPG, Cuité, PB. E-mail: rafael@df.ufcg.edu.br

³ Física, Professor Doutor, Unidade Acadêmica de Física, UFPG, Campina Grande, PB. Email: aerlima@df.ufcg.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Os estados coerentes foram introduzidos por Glauber em 1963 [Glauber, 1963], que tinha como principal objetivo mostrar uma descrição consistente para a teoria quântica da coerência óptica. Glauber consolidou a idéia de que os autoestados quânticos de um campo de radiação são exatamente os autoestados do operador de aniquilação dos quanta do campo eletromagnético (fótons). Ele mostrou que essas autofunções podem ser obtidas a partir da ação de um operador de deslocamento sobre o vácuo do campo eletromagnético livre. Mostrou também que essas definições são equivalentes aos estados de incerteza mínima descobertos por Schrödinger.

Com o surgimento do laser na década de 60, se iniciou uma série de trabalhos sobre a interação da matéria com o campo eletromagnético. Glauber usou esses estados para mostrar a equivalência entre as descrições da mecânica semi-clássica e a mecânica quântica de feixe de luz com estatística arbitrária sem considerar os efeitos não-lineares. Pelos seus diversos trabalhos, Glauber é considerado o pai da Óptica Quântica. Estados Coerentes são ingredientes bastante familiares a físicos da área de Óptica Quântica [Nussenzveig, 1973], sendo suas ferramentas de trabalho do dia-a-dia.

Nós faremos o tratamento da equação de Schrödinger com o hamiltoniano explicitamente dependente do tempo, para resolver tal sistema utilizaremos o método desenvolvido por Lewis e Riesenfeld [Lewis e Riesenfeld, 1969]. O método dos invariantes, desenvolvido por Lewis e Riesenfeld, possibilita encontrar a solução exata da equação de Schrödinger dependente do tempo, através de uma conexão que é feita entre os autoestados do invariante e as soluções da equação de Schrödinger [ALVES DANTAS, PEDROSA], por meio de uma fase.

Também estudaremos a existência de uma fase natural que surge em sistemas que sofre expansões adiabáticas [J. GRIFFITHS, M CERVERO e D LEJARRETA, C. GERRY e F. PLUMB], o interesse nessa propriedade é o fato da equação de Schrödinger ter certa equivalência com as equações de Hamilton no limite \hbar , possibilitando compatibilizar a mecânica clássica com a mecânica quântica no sentido de se estabelecer uma transição suave com elas no limite semi-clássico.

2. Oscilador Harmônico Quântico (OHQ)

Utilizando a notação de “bra-ket” de Dirac, temos as seguintes propriedades do operador hamiltoniano que governa o OHQ unidimensional, na representação dos estados de números $|n\rangle$ [DE LIMA RODRIGUES, 1997]:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (2.1)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (2.2)$$

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Definindo os operadores de levantamento e abaixamento em função do operador posição \hat{x} e do operador momento $\hat{p} \rightarrow -i\hbar d/dx$, temos

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (2.4)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (2.5)$$

sendo que esses operadores obedecem as seguintes relações

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1, \quad (\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a} \quad (2.6)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (2.7)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.8)$$

$$[\hat{H}, \hat{a} \text{ ou } \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega(-\hat{a} \text{ ou } \hat{a}^\dagger) \quad (2.9)$$

logo, podemos reescrever o hamiltoniano em função desses operadores, como segue

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.10)$$

O termo $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ é tão comum em mecânica quântica que é prático definir esse produto como um operador que na literatura é conhecido por operador de número, a saber

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.11)$$

Essas equações constituem a álgebra de Heisenberg-Weyl, as quais são denominadas como método de fatoração.

3. Estados Quasi-Clássicos do OHQ

Logo após Schrödinger postular a equação diferencial que governa a evolução no tempo da onda de matéria de de Broglie, culminando com o surgimento da mecânica quântica não-relativística em 1926, ele investigou a possibilidade de se construir autofunções quânticas, para um oscilador harmônico simples, com as seguintes características: estados quânticos descritos por função de onda gaussiana geral, com largura da gaussiana que descreve o estado fundamental, que tivesse momento linear e energia arbitrária, seguissem a trajetória de uma partícula clássica no potencial e não mudasse sua forma com o tempo.

Tais estados foram denominados de estados quase-clássicos devido ao fato de possuírem uma analogia clássica. Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ podem ser obtidos por uma generalização da construção dos autoestados do oscilador harmônico simples $|n\rangle$ [WOLNEY FILHO, 2002, DE LIMA RODRIGUES, CBPF-NF-068/01],

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha) |n\rangle, \quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \quad (3.1)$$

onde o estado $|\alpha\rangle$ satisfaz a seguinte equação de autovalor

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \rightarrow \langle n|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha| \quad (3.2)$$

multiplicando a equação (3.1) pelo bra $\langle m|$ encontramos que

$$\langle m|\alpha\rangle = \langle m| \sum_n C_n(\alpha) |n\rangle = \sum_{n,m} C_n(\alpha) \langle m|n\rangle = C_n(\alpha) \quad (3.3)$$

temos que o estado $\langle n|$ pode ser escrito na forma como segue [WOLNEY FILHO]

$$\langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|\hat{a}^n \quad (3.4)$$

com isso podemos reescrever o lado esquerdo da equação (3.2)

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0|\hat{a}^n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle = C_0(\alpha) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (3.5)$$

podemos concluir a partir da equação acima que

$$\sum_n C_n(\alpha) = C_0(\alpha) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (3.6)$$

para determinarmos $C_0(\alpha)$, usamos a condição de normalização

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_n |C_n(\alpha)|^2 = |C_0(\alpha)|^2 \sum_n \left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = |C_0(\alpha)|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1 \Rightarrow C_0(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (3.7)$$

assim, o estado coerente do oscilador harmônico quântico toma a forma

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha) |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.8)$$

Os estados coerentes possuem três definições equivalentes, demonstraremos a seguir a propriedade de mínima incerteza, tomemos as coordenadas canônicas

$$\hat{x} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.9)$$

$$\hat{p} = -i \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (3.10)$$

segue-se que

$$\langle \hat{x} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha + \alpha^*) \quad (3.11)$$

$$\langle \hat{p} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle = -i \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2} \langle \alpha | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = -i \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha - \alpha^*) \quad (3.12)$$

para a realização desses cálculos utilizamos as propriedades expressas pela equação (3.2), com cálculos semelhantes e usando a relação expressa pela equação (2.6), obtemos

$$\langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [1 + (\alpha + \alpha^*)^2] \quad (3.13)$$

$$\langle \alpha | \hat{p}^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar m\omega}{2} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2] \quad (3.14)$$

então podemos agora calcular

$$\langle \alpha | \Delta \hat{x} | \alpha \rangle = ((\hat{x}^2)_\alpha - \langle \hat{x} \rangle_\alpha^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega} [1 + (\alpha + \alpha^*)^2] - \frac{\hbar}{2m\omega} (\alpha + \alpha^*)^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (3.15)$$

$$\langle \alpha | \Delta \hat{p} | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2] + \frac{\hbar m\omega}{2} (\alpha - \alpha^*)^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \quad (3.16)$$

realizando o produto

$$\langle \Delta \hat{x} \rangle_\alpha \langle \Delta \hat{p} \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.17)$$

Essa é uma propriedade notável que os estados coerentes apresentam a de possuir a menor incerteza possível permitida na mecânica quântica. Considerando o oscilador harmônico no estado coerente, a probabilidade de encontrá-lo no estado $|n\rangle$ é dada por

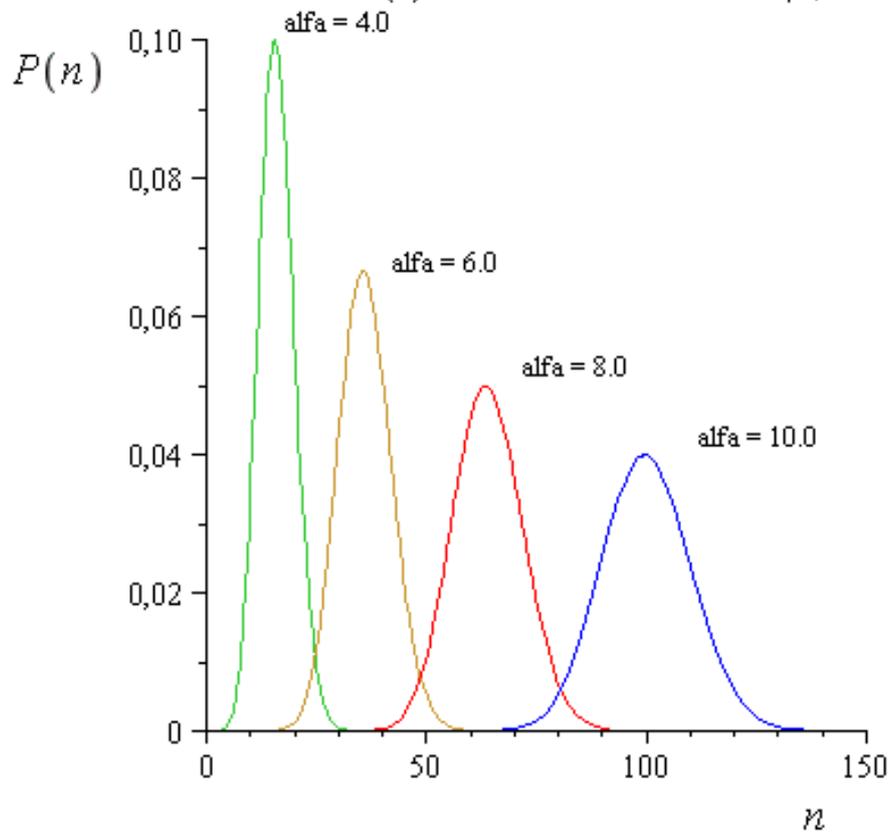
$$P_n(\alpha) = |C_n(\alpha)|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (3.18)$$

essa fórmula mostra que a probabilidade $P_n(\alpha)$ fica expressa por uma distribuição de Poisson, com valor médio de $\langle \hat{N} \rangle_\alpha$ dado por $|\alpha|^2$.

$$\langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.19)$$

onde o operador \hat{N} é o operador de número. Uma forma interessante de entender esse resultado é observar o gráfico (que foi gerado no software Maple 11) proposto pela equação (3.13).

Distrib. de Ftons $P(n)$ no Estado Coerente $|\alpha\rangle$



Podemos constatar que quanto maior for o autovalor α mais próximo de uma gaussiana a curva se aproxima.

4. Operador Deslocamento ($\hat{D}(\alpha)$)

A partir da expressão (3.12) podemos definir um novo operador, para isso observamos que o estado $|n\rangle$ pode ser escrito a partir da equação (3.8), como segue

$$\langle n | \dagger = \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \hat{a}^n \right) \dagger = |n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (4.1)$$

então

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (4.2)$$

assim definimos o operador $\hat{D}(\alpha)$, como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^\dagger} \quad (4.3)$$

Podemos reescrever o operador $\hat{D}(\alpha)$, observando que

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \left[1 - \alpha^* \hat{a} + \frac{1}{2} (\alpha^* \hat{a})^2 + \dots \right] |0\rangle = |0\rangle \quad (4.4)$$

o que nos permite escrever uma expressão mais simétrica em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger

$$\widehat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (4.5)$$

usando a identidade de BCH (Baker, Campbell e Hausdorff) dada pela equação

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad (4.6)$$

$$\widehat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} = e^{\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^\dagger\right) + (-\alpha^* \hat{a}) + \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^\dagger\right), (-\alpha^* \hat{a})\right]} = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad (4.7)$$

O operador deslocamento apresenta as seguintes propriedades

$$\widehat{D}^{-1}(\alpha) = \widehat{D}^\dagger(\alpha) \quad (4.8)$$

$$\widehat{D}(\alpha)^{-1} \hat{a} \widehat{D}(\alpha) = \hat{a} - \alpha \quad (4.9)$$

$$\widehat{D}(\alpha)^{-1} \hat{a}^\dagger \widehat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha. \quad (4.10)$$

A equação (4.8) implica dizer que o operador deslocamento é um operador unitário, enquanto que as equações (4.9) e (4.10) é que caracterizam o operador deslocamento. De uma forma geral podemos interpretar $\widehat{D}(\alpha)$ como sendo um gerador do estado coerente $|\alpha\rangle$ ao atuar no estado de vácuo $|0\rangle$, essa é a razão para esse operador ser denominado operador deslocamento.

5. Não-Ortogonalidade dos Estados Coerentes

Uma propriedade muito importante que os estado coerentes do OHQ apresentam é a não-ortogonalidade, ou seja, os estados coerentes são um conjunto supercompleto, pois nos possibilita expressar qualquer autoket de um estado quântico do OHQ em termos dos estados coerentes, inclusive dele próprio. Demonstraremos a propriedade de não-ortogonalidade, sejam $|\alpha\rangle$ e $|\alpha'\rangle$ dois estados coerentes,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (5.1)$$

$$\langle\alpha'| = e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_{n'} \frac{(\alpha'^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \langle 0| \frac{\hat{a}^{n'}}{\sqrt{n'!}} = e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_{n'} \langle n'| \frac{(\alpha'^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \quad (5.2)$$

$$\langle\alpha'|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_{n'} \langle n'| \frac{(\alpha'^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n',n} \frac{(\alpha'^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \delta_{n'n} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\alpha'|^2}. \quad (5.3)$$

Nessa equação, vemos que o braket $\langle\alpha'|\alpha\rangle$ para os estados coerentes obedece à condição de normalização $\langle\alpha'|\alpha\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}$, apenas para o caso de $\alpha' = \alpha$. Contudo, a propriedade de completudeza para os estados coerentes pode ser obtida, fazendo

$$\frac{1}{\pi} \int \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha = \sum_{m,n} |n\rangle \langle m| = 1 \quad (5.4)$$

onde $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ e $d^2\alpha = |\alpha|d|\alpha|$. Essa propriedade nos informa que os estados coerentes é um conjunto fechado.

6. Estados Coerentes Dependentes do Tempo

O método do operador invariante introduzido por Lewis e Riesenfeld nos fornece uma poderosa ferramenta para estudar a equação de Schrödinger dependente do tempo para o oscilador harmônico. O grande interesse neste problema é principalmente por poder ser tratado como um modelo exatamente solúvel e oferece um largo caminho de aplicações na descrição de sistemas físicos em diferentes áreas da física.

Vamos considerar o hamiltoniano do oscilador harmônico com a frequência dependente do tempo

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\omega^2(t)x^2}{2m} \quad (6.1)$$

a equação de Schrödinger nos dá a evolução temporal desse hamiltoniano,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E(x, t) = \hat{H}(t) \Psi_E(x, t). \quad (6.2)$$

segundo o formalismo de Lewis e Riesenfeld procuramos um operador hermitiano que satisfaça a equação

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}, H] + \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} = 0. \quad (6.3)$$

A condição acima nos permite construir a solução da equação de Schrödinger na forma

$$\psi_E(x, t) = e^{i\mu_\lambda(t)} \phi_\lambda(x, t) \quad (6.4)$$

na qual $\phi_\lambda(x, t)$ representa uma autofunção do $\hat{I}(t)$ com autovalor independente do tempo λ e $\mu_\lambda(t)$ é uma função de fase que pode ser calculada através da relação

$$\hbar \frac{d\mu_\lambda(t)}{dt} = \langle \phi_\lambda | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi_\lambda \rangle. \quad (6.5)$$

Vamos considerar um invariante de forma quadrática e hermitiano

$$\hat{I}_0(t) = \frac{1}{2} [\xi(t)x^2 + \beta(t)\hat{p}^2 + \gamma(t)(x\hat{p} + \hat{p}x)] \quad (6.6)$$

onde $\xi(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. Para encontrá-las substituímos as equações (6.1) e (6.6) na equação

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{I}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{I}, H] + \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\xi x^2 + \beta \hat{p}^2 + \gamma(x\hat{p} + \hat{p}x), \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\omega^2(t)x^2}{2m} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\xi x^2 + \beta \hat{p}^2 + \gamma(x\hat{p} + \hat{p}x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\dot{\xi} - \frac{2\omega}{m} \gamma \right) x^2 + \left(\dot{\beta} + \frac{2}{m} \gamma \right) \hat{p}^2 + \left(\dot{\gamma} + \frac{\xi}{m} - \frac{\omega^2 \beta}{m} \right) \{x, \hat{p}\} \right] \end{aligned}$$

para que o invariante $\hat{I}_0(t)$ satisfaça a condição (6.3) devemos ter

$$\dot{\xi} = \frac{2\omega}{m} \gamma \quad (6.8)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2}{m} \gamma \quad (6.9)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega^2 \beta}{m} - \frac{\xi}{m}. \quad (6.10)$$

Nosso objetivo é encontrar um invariante na forma quadrática, que facilita a sua fatorização, logo definindo uma outra função $\sigma(t)$,

$$\beta(t) = \sigma^2(t) \rightarrow \dot{\beta} = 2\sigma\dot{\sigma} \quad (6.12)$$

da equação (6.9), encontramos que

$$\gamma = -\frac{m}{2} \dot{\beta} = -m\sigma\dot{\sigma} \quad (6.13)$$

da equação (6.10), encontramos que

$$\xi = \omega^2 \beta - m\dot{\gamma} = \omega^2 \sigma^2 + m^2(\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma}) \quad (6.14)$$

a equação (6.8) restringe $\sigma(t)$, pela relação

$$\sigma \frac{d}{dt} (m^2 \ddot{\sigma} + \omega^2 \sigma) + 3\sigma (m^2 \ddot{\sigma} + \omega^2 \sigma) = 0 \quad (6.15)$$

temos como solução para esta equação o seguinte resultado

$$m^2 \ddot{\sigma} + \omega^2 \sigma = \frac{1}{\sigma^3} \quad (6.16)$$

com isto podemos reescrever ξ

$$\xi = m^2 \dot{\sigma}^2 + (m^2 \ddot{\sigma} + \omega^2 \sigma) \sigma = m^2 \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{\sigma^2} \quad (6.17)$$

com as equações (6.12), (6.13) e (6.17) podemos expressar o nosso invariante, como

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \left[\left(m^2 \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) x^2 + \sigma^2 \hat{p}^2 - m\sigma \dot{\sigma} (x\hat{p} + \hat{p}x) \right] = \frac{1}{2} \left[(\sigma^2 \hat{p}^2 - m\sigma \dot{\sigma} x\hat{p} - m\sigma \dot{\sigma} \hat{p}x + m^2 \dot{\sigma}^2 x^2) + \frac{x^2}{\sigma^2} \right]$$

logo, nosso invariante dependente do tempo pode ser expresso como

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{x}{\sigma(t)} \right]^2 + [\sigma(t)\hat{p} - m\dot{\sigma}(t)x]^2 \right\}. \quad (6.18)$$

Utilizando-se das técnicas de fatorização em mecânica quântica podemos definir os operadores de levantamento e rebaixamento dependente do tempo do invariante $\hat{I}(t)$ em função de x , \hat{p} e $\sigma(t)$ como segue

$$\hat{b}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\frac{1}{\sigma} x + i(\sigma\hat{p} - m\dot{\sigma}x) \right] \quad (6.19)$$

$$\hat{b}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\frac{1}{\sigma} x - i(\sigma\hat{p} - m\dot{\sigma}x) \right] \quad (6.20)$$

fazendo a combinação dessas equações encontramos \hat{p} e x em função de $\hat{b}(t)$, $\hat{b}^\dagger(t)$ e $\sigma(t)$ como segue

$$\hat{b} + \hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \frac{2x}{\sigma} \rightarrow x = \frac{\sigma\sqrt{2\hbar}}{2} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (6.21)$$

$$\hat{b} - \hat{b}^\dagger = \frac{2i}{\sqrt{2\hbar}} (\sigma\hat{p} - m\dot{\sigma}x) \rightarrow \hat{p} = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2\sigma} [m\dot{\sigma}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + i(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)] \quad (6.22)$$

esses operadores satisfazem a seguinte álgebra

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} = 1 \quad (6.23)$$

$$\hat{b}|s\rangle = \sqrt{s}|s-1\rangle \quad (6.24)$$

$$\hat{b}^\dagger|s\rangle = \sqrt{s+1}|s+1\rangle \quad (6.25)$$

podemos expressar o invariante em função dos operadores \hat{b} e \hat{b}^\dagger , como segue

$$I = \hbar \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.26)$$

onde seu espectro é dado por

$$\lambda_s = \hbar \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (6.27)$$

O nosso próximo passo será expressar os autoestados de $\hat{I}(t)$, esses autoestados formam um conjunto completo e contínuo, cujos autovalores independentes do tempo λ constituem soluções da equação

$$\hat{I}|s, t\rangle = \lambda|s, t\rangle \quad (6.28)$$

com a condição

$$\langle s'|s\rangle = \delta(\lambda_s - \lambda_{s'}). \quad (6.29)$$

A solução da equação (6.28) encontramos substituindo a expressão (6.18). Assim, podemos encontrar a solução geral da equação (6.2) através da relação (6.4), logo os estados coerentes em função dos autoestados $|s\rangle$, fica

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\mu_\lambda(t)} |s, t\rangle \quad (6.30)$$

onde $|s, t\rangle$ são os autoestados dependente do tempo do invariante $\hat{I}(t)$

7. Fase de Berry

A fase de Berry é uma fase que aparece em sistemas que sofre transformações adiabáticas cíclicas. Mostraremos que uma partícula que começa no n -ésimo auto-estado de $H(0)$ permanece, sob condições adiabáticas, no n -ésimo auto-estado de $H(t)$, tomando apenas o fator de fase dependente do tempo. A função de onda especificamente fica

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} |\psi_n(t)\rangle \quad (7.1)$$

onde

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (7.2)$$

é a fase dinâmica que é a generalização do fator usual $e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$ para o caso quando E_n é função do tempo e

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt' \quad (7.3)$$

esta é chamada de fase geométrica.

Agora com $|\psi_n\rangle$ dependente de t porque há um parâmetro que $R(t)$ no hamiltoniano que muda com o tempo. Assim

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_n\rangle = \frac{\partial}{\partial R} |\psi_n\rangle \frac{d}{dt} R \quad (7.4)$$

logo a equação (7.3) pode ser reescrita como segue

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial}{\partial R} \psi_n \right. \right\rangle \frac{d}{dt'} R dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial}{\partial R} \psi_n \right. \right\rangle dR \quad (7.5)$$

onde R_i e R_f são os valores iniciais e finais de $R(t)$. Em particular, se o hamiltoniano retornar a forma original depois de um tempo T , sendo que $R_i = R_f$, então $\gamma_n(t) = 0$, o que não é nada interessante. Entretanto, assumindo que na equação (7.4) há somente um parâmetro no hamiltoniano que está mudando. Supomos haver N deles: $R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)$, neste caso

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_n\rangle = \frac{\partial}{\partial R_1} |\psi_n\rangle \frac{d}{dt} R_1 + \frac{\partial}{\partial R_2} |\psi_n\rangle \frac{d}{dt} R_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial R_N} |\psi_n\rangle \frac{d}{dt} R_N = (\nabla_R \psi_n) \frac{d}{dt} \mathbf{R} \quad (7.6)$$

onde $\mathbf{R} \equiv (R_1, R_2, \dots, R_N)$, e $\nabla_{\mathbf{R}}$ é o gradiente com os respectivos parâmetros. Assim a equação (7.1.5) será reescrita da seguinte forma

$$\gamma_n(t) = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle d\mathbf{R} \quad (7.7)$$

e se o hamiltoniano retornar a forma original depois de um tempo T , a rede geométrica da mudança de fase é

$$\gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n | \nabla_{\mathbf{R}} \psi_n \rangle d\mathbf{R}. \quad (7.8)$$

Esta é uma integral de linha ao redor de uma curva fechada com um parâmetro no espaço e não é em geral, zero. Esta equação foi obtida por Michael Berry [BERRY], em 1984 e $\gamma_n(T)$ é chamado de fase de Berry

7.1 Cálculo das fases

Considerando o nosso hamiltoniano dado pela equação (6.1) e expressando-o em função dos operadores dependentes do tempo dados pelas relações equações (6.19) e (6.20), teremos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\omega^2 x^2}{2m} = (\hbar/4m) \{ [m\dot{\sigma}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) + i/\sigma(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)] \}^2 + \omega^2 [\sigma(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)]^2 \\ &= (\hbar/4m) \left[m^2 \dot{\sigma}^2 (\hat{b}^2 + \hat{b}^{\dagger 2}) + m^2 \dot{\sigma}^2 \{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} + (2m\dot{\sigma}i/\sigma) (\hat{b}^2 - \hat{b}^{\dagger 2}) + (1/\sigma^2) \{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \right. \\ &\quad \left. - (1/\sigma^2) (\hat{b}^2 + \hat{b}^{\dagger 2}) + \omega^2 \sigma^2 (\hat{b}^2 + \hat{b}^{\dagger 2}) + \omega^2 \sigma^2 \{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \right] \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

com o hamiltoniano expresso dessa forma podemos calcular a fase dinâmica $\theta_n(t)$,

$$\langle s | \hat{H} | s \rangle = \frac{\hbar}{4m} \left(m^2 \dot{\sigma}^2 + \omega^2 \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) \langle s | \{ \hat{b} \hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger \hat{b} \} | s \rangle = \frac{\hbar}{2m} \left(m^2 \dot{\sigma}^2 + \omega^2 \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) \left(s + \frac{1}{2} \right) \quad (7.1.2)$$

para a resolução do problema acima usamos os seguintes resultados

$$\langle s | \hat{b} \hat{b}^\dagger | s \rangle = \langle s + 1 | (s + 1)^{1/2} (s + 1)^{1/2} | s + 1 \rangle = (s + 1) \quad (7.1.3)$$

$$\langle s | \hat{b}^\dagger \hat{b} | s \rangle = \langle s - 1 | s^{1/2} s^{1/2} | s - 1 \rangle = s \quad (7.1.4)$$

$$\langle s | \hat{b}^2 | s \rangle = \langle s - 1 | (s + 1)^{1/2} s^{1/2} | s + 1 \rangle = 0 = \langle s | \hat{b}^{\dagger 2} | s \rangle. \quad (7.1.5)$$

Passaremos agora ao cálculo da fase geométrica $\gamma_n(t)$ que iniciamos fazendo a derivada parcial da equação (6.25)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}^\dagger | s \rangle + \hat{b}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} | s \rangle = \sqrt{n+1} \frac{\partial}{\partial t} | s + 1 \rangle \quad (7.1.6)$$

fazendo o produto escalar com $\langle s' |$

$$\left\langle s' \left| \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}^\dagger \right| s \right\rangle + \left\langle s' \left| \hat{b}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \right| s \right\rangle = \sqrt{n+1} \left\langle s' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s + 1 \right\rangle \quad (7.1.7)$$

usando o “bra” da equação (6.24) encontramos que

$$\left\langle s' \left| \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}^\dagger \right| s \right\rangle + \sqrt{s'} \langle s' - 1 | \frac{\partial}{\partial t} | s \rangle = \sqrt{n+1} \left\langle s' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s + 1 \right\rangle \quad (7.1.8)$$

fazendo a mudança de $s \rightarrow s - 1$, temos que

$$\left\langle s' \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{s}} \left\langle s' \left| \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}^\dagger \right| s - 1 \right\rangle + \frac{\sqrt{s'}}{s} \left\langle s' - 1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s - 1 \right\rangle \quad (7.1.9)$$

substituindo as equações (6.21) e (6.22) na equação (6.20), encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{b}^\dagger = \frac{1}{2} \left\{ \left[-2 \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + im(\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) \right] \hat{b} + im(\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) \hat{b}^\dagger \right\} \quad (7.1.10)$$

considerando que só nos interessa os elementos diagonais para que a equação (6.5) seja verificada, temos que ao substituir a equação (7.10) na equação (7.9) e usando as propriedades do adjunto das equações (6.24) e (6.25), temos que

$$\left\langle s \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s \right\rangle = \frac{im}{2} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) + \left\langle s - 1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s - 1 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| 0 \right\rangle + \frac{ism}{2} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) \quad (7.1.11)$$

por conveniência podemos fazer

$$\left\langle 0 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| 0 \right\rangle = \frac{im}{4} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) \quad (7.1.12)$$

de forma que o lado esquerdo da equação (7.12) desapareça no limite em que σ torne-se uma constante, logo

$$\left\langle s \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| s \right\rangle = \frac{im}{4} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) + \frac{ism}{2} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) = \hbar \frac{im}{2} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) \left(s + \frac{1}{2} \right). \quad (7.1.13)$$

Podemos associar a fase de Berry com a fase proposta por Lewis, isso é possível levando em conta o teorema adiabático. De acordo com este teorema, se um sistema descrito por um hamiltoniano $\hat{H}(t)$, tem uma variação suave (adiabática), então em cada instante t o estado do sistema é autoestado de $\hat{H}(t)$ e em particular se $\hat{H}(t)$ retorna ao valor original $H_0(t)$, então o sistema também ao estado original, exceto por um fator de fase. Fazendo a combinação da fase geométrica com a dinâmica, temos

$$\frac{d\mu_\lambda}{dt} = \gamma_n(t) - \theta_n(t) = \frac{m}{2} (\sigma\ddot{\sigma} - \dot{\sigma}^2) \left(s + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2m} \left(m^2 \dot{\sigma}^2 + \omega^2 \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) \left(s + \frac{1}{2} \right) \quad (7.1.14)$$

e usando o resultado expresso pela equação (6.16), encontramos que

$$\frac{d\mu_\lambda}{dt} = -\frac{1}{2m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{\sigma^3} \right) \sigma \Rightarrow \mu_\lambda(t) = -\frac{1}{m} \left(s + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(t')} dt'. \quad (7.1.15)$$

Esta fase nos permitira fazer uma conexão entre os autoestados do invariante e a equação de Schrödinger tal como está expresso pela equação (6.30). Nós sabemos que os blocos constituintes da física são bósons e férmions, para cada caso a seguir calcularemos a fase de Berry no estado coerente (YONG-DE e LEI), tomemos o oscilador bosônico, com a definição de estado coerente dada pela equação (4.2), se $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ mudar lentamente ao redor de uma curva fechada no plano complexo e retornar ao valor original, a fase de Berry adquirida é

$$\gamma_n(C) = i \oint \left[\left\langle \alpha \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right| \alpha \right\rangle d\alpha_1 + \left\langle \alpha \left| \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right| \alpha \right\rangle d\alpha_2 \right] \quad (7.1.16)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} |\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} e^{[(\alpha_1 + i\alpha_2)\hat{a}^\dagger - (\alpha_1 - i\alpha_2)\hat{a}]} |0\rangle = (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) e^{[(\alpha_1 + i\alpha_2)\hat{a}^\dagger - (\alpha_1 - i\alpha_2)\hat{a}]} |0\rangle = (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) |\alpha\rangle \quad (7.1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} |\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} e^{[(\alpha_1 + i\alpha_2)\hat{a}^\dagger - (\alpha_1 - i\alpha_2)\hat{a}]} |0\rangle = i(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) |\alpha\rangle \quad (7.1.18)$$

então

$$\gamma_n(C) = i \oint \left[\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \alpha \rangle d\alpha_1 + i \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \alpha \rangle d\alpha_2 \right] = \oint (\alpha_2 d\alpha_1 - \alpha_1 d\alpha_2). \quad (7.1.19)$$

Usando o teorema de Stokes

$$\oint Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (7.1.20)$$

obtemos

$$\gamma_n(C) = - \iint d\alpha_1 d\alpha_2 = -2S_C. \quad (7.1.21)$$

Podemos dizer que a fase de Berry para os estados coerentes do oscilador bosônico é igual ao negativo de duas vezes a área fechada no plano complexo.

7.2 Fase de Berry numa base de estados coerentes Generalizada

Introduziremos agora a álgebra de Lie do sistema SU(1,1) que consiste dos operadores geradores

$$K_0 = \frac{1}{2} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (7.2.1)$$

$$K_+ = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger)^2 \quad (7.2.2)$$

$$K_- = \frac{1}{2} \hat{a}^2 \quad (7.2.3)$$

esses operadores satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[K_0, K_{(\pm)}] = \pm K_{(\pm)} \quad (7.2.4)$$

$$[K_+, K_-] = -2K_0 \quad (7.2.5)$$

onde

$$\begin{cases} K_0 |m, k\rangle = (m+k) |m, k\rangle \\ K_+ |m, k\rangle = \sqrt{(m+1)(m+2k)} |m+1, k\rangle \\ K_- |m, k\rangle = \sqrt{m(m+2k-1)} |m-1, k\rangle \end{cases} \quad (7.2.6)$$

temos também uma relação importante conhecida como invariante de Casimir

$$C = K_0^2 - \frac{1}{2} (K_+ K_- + K_- K_+) \quad (7.2.7)$$

que possui a seguinte propriedade

$$C |m, k\rangle = k(k-1) |m, k\rangle \quad (7.2.8)$$

o número k é denominado índice de Bargmann e está relacionado ao operador de Casimir. Com as propriedades dadas acima a generalização dos estados coerentes [PERELOMOV] para o grupo de simetria SU(1,1) é

$$|\alpha, k\rangle = e^{(\epsilon K_+ - \epsilon^* K_-)} |0, k\rangle \quad (7.2.10)$$

onde

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \theta e^{-i\phi} \quad (7.2.11)$$

sendo θ e ϕ um grupo de parâmetros com intervalo de

$$0 < \theta < \infty \quad (7.2.12)$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (7.2.13)$$

$$\alpha = -\tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{-i\phi} \quad (7.2.14)$$

com o estado coerente generalizado expresso pela equação(7.2.10) podemos calcular a fase correspondente a equação (7.1.16), onde

$$\frac{\partial}{\partial\theta}|\alpha, k\rangle = e^{\left(-\frac{1}{2}\theta e^{-i\phi}K_+ + \frac{1}{2}\theta e^{i\phi}K_-\right)}|0, k\rangle = \left(\frac{1}{2}e^{i\phi}K_- - \frac{1}{2}e^{-i\phi}K_+\right)|\alpha, k\rangle = \frac{isen(\phi)}{2}\langle\alpha, k|(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2)|\alpha, k\rangle \quad (7.2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}|\alpha, k\rangle = \left(\frac{1}{2}\theta ie^{i\phi}K_- + \frac{1}{2}\theta ie^{-i\phi}K_+\right)|\alpha, k\rangle = \frac{\theta icos(\phi)}{2}\langle\alpha, k|(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2)|\alpha, k\rangle \quad (7.2.16)$$

então calculando o valor esperado de cada parcela dada pela equação (7.1.16) e usando as propriedades dos estados coerentes (3.2), temos

$$\left\langle\alpha, k\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right|\alpha, k\right\rangle = \frac{isen(\phi)}{2}\langle\alpha, k|(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2)|\alpha, k\rangle = \frac{isen(\phi)}{2}(\alpha^2 - \alpha^{*2}) \quad (7.2.17)$$

$$\left\langle\alpha, k\left|\frac{\partial}{\partial\phi}\right|\alpha, k\right\rangle = \frac{i\theta cos(\phi)}{2}\langle\alpha, k|(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2)|\alpha, k\rangle = \frac{i\theta cos(\phi)}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2}) \quad (7.2.18)$$

usando a definição de α dada pela equação (7.2.13), temos que a equação (7.1.16) fica

$$\begin{aligned} \gamma(C) = & -\oint \frac{sen(\phi)}{2} \left\{ \left[\tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{-i\phi} \right]^2 - \left[\tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{i\phi} \right]^2 \right\} d\theta \\ & + \frac{\theta cos(\phi)}{2} \left\{ \left[\tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{-i\phi} \right]^2 + \left[\tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{i\phi} \right]^2 \right\} d\phi \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

usando teorema expresso pela equação (7.1.20), onde

$$P = -isen^2(2\phi) \tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial\phi} = -4i \tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) sen(2\phi) cos(2\phi) \quad (7.2.20)$$

$$Q = \theta cos^2(2\phi) \tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial\theta} = cos^2(2\phi) \left[\tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \theta \tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left(1 - \tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) \right] \quad (7.2.21)$$

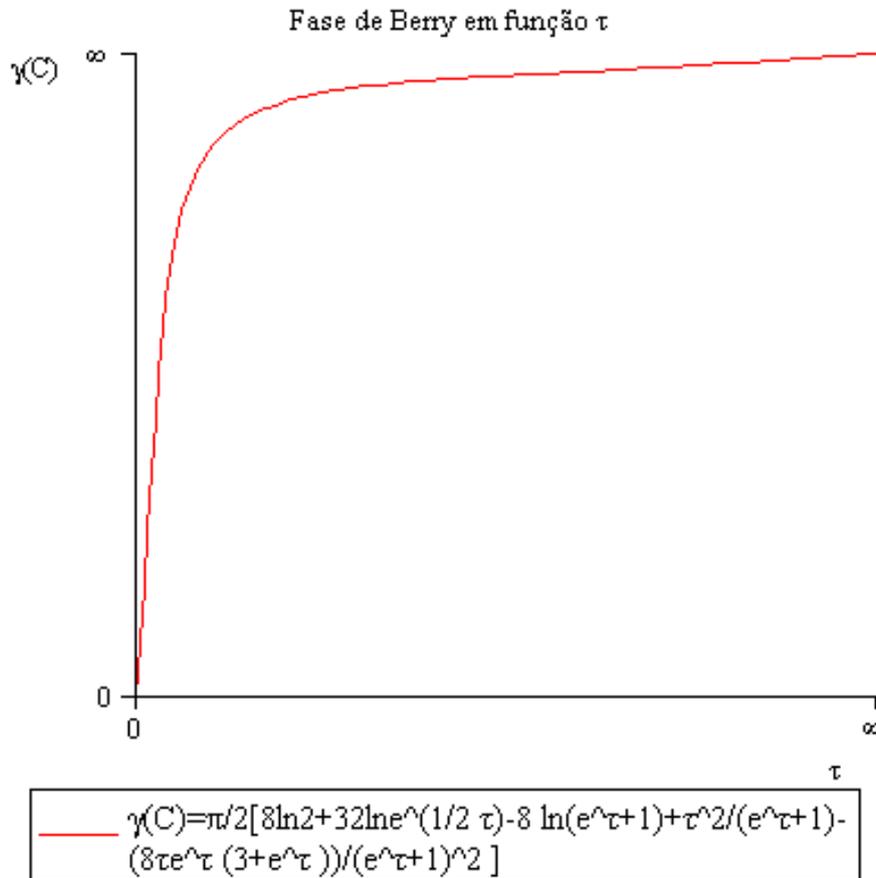
considerando que a nossa região esteja restrito ao um circulo de raio τ , escrevemos (7.2.18), como segue

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial\phi} - \frac{\partial P}{\partial\theta} \right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^A \left\{ cos^2(2\phi) \left[\tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \theta \tanh\left(\frac{1}{2}\theta\right) \left(1 - \tanh^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) \right] \right\} \theta d\theta d\phi \quad (7.2.22)$$

podemos notar que o termo $\frac{\partial P}{\partial\phi}$ dessa integral é nulo quando for realizado a integração logo calculando com auxilio do software matemático maple 11 a equação acima temos

$$\gamma(C) = \frac{\pi}{2} \left[8 \ln 2 + 32 \ln e^{\frac{1}{2}\tau} - 8 \ln(e^\tau + 1) + \frac{\tau^2}{e^\tau + 1} - \frac{8\tau e^\tau(3 + e^\tau)}{(e^\tau + 1)^2} \right] \quad (7.2.23)$$

Plotando esse gráfico no maple encontramos



O gráfico mostra a fase de Berry em função da curva particularmente escolhida como um círculo (C_0) de raio τ .

A fase que acabamos de calcular pode ser aplicada para qualquer sistema que utilize o grupo de simetria $SU(1,1)$, numa base de estados coerentes, que deixamos em função de uma curva descrita por um círculo de raio τ .

8. Resultados e Discussões

Fizemos um análise dos estados coerentes para o caso independente do tempo, onde abordamos as suas três definições equivalentes que é a de menor incerteza, os estados coerentes canônicos (autofunção do operador de abaixamento) e a de operador gerador de estados coerentes ao atuar no estado fundamental. Em seguida tratamos os estados coerentes com dependência temporal, onde abordamos o formalismo de Lewis e Riesenfeld (L. H.), que consiste em construir um invariante associado ao hamiltoniano, onde suas autofunções são relacionadas com a solução da equação de Schrödinger através de uma fase. Existem vários métodos para a resolução da equação de Schrödinger dependente do tempo, mas todos dão soluções apenas aproximadas, enquanto que o método de L. H. nos dá exata a solução, consistindo numa grande vantagem sobre os demais.

O hamiltoniano que escolhemos é da forma do oscilador harmônico, tendo a dependência temporal apenas na frequência, significando dizer que apenas a termo da energia potencial possui dependência temporal e o termo cinético é independente do tempo. Calculamos a fase de Berry nos estados coerentes para este hamiltoniano bosônico, como também numa base de estados coerentes generalizadas para o grupo de simetria $SU(1,1)$, podemos constatar de nosso resultado que o grupo de simetria $SU(1,1)$ é operacionalmente mais prático que os estados coerentes canônicos, sendo muito mais interessante para se trabalhar. Com algumas condições impostas (teorema adiabático), fizemos uma conexão entre a fase de Berry e a fase de L. H., que é o termo fundamental para se encontrar a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo por meio de um dado invariante.

9. Agradecimentos

Agradeço a ambos professor doutor Rafael de Lima Rodrigues por ter acompanhado o andamento do projeto e ao professor doutor Aécio Ferreira de Lima pelas inúmeras discussões a respeito do assunto, além do excelente material fornecido e ao CNPq por financiar a minha bolsa de iniciação científica.

10. Referências

- ALVES DANTAS, M. C. **Hamiltonianas Dependentes do Tempo, Estados Comprimidos e Interferência no Espaço de Fase**. Dissertação (Mestrado em Física), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João pessoa, PB. 1991. 77f.
- BERRY, M. J. **J. Phys. A: Math. Gen.** vol. 18, p 15-27, 1985.
- C. GERRY, C.; F. PLUMB, M. Evolution of SU(1,1) Coherent States in Harmonic Oscillators with Time-Dependent Masses, **J. Phys. A: Math. Gen.** **23**, p. 3997-4011, 1990.
- DE LIMA RODRIGUES, R. Mecânica Quântica na descrição de Schrödinger. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 19, nº 1, p. 68-82, 1997.
- DE LIMA RODRIGUES, R.; FERNANDES JÚNIOR, D. & MARQUES BATISTA, S. Notas de Física: **Estados Coerentes em Mecânica Quântica**. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro. 2001. 23p.
- J. GRIFFITHS, D. Introduction to Quantum Mechanics: **The Adiabatic Approximation**. Editora: Pearson Prentice Hall, 2005.p. 323-349.
- LEWIS, H. R.; RIESENFELD, W. B. An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-dependent Electromagnetic Field. **Journal of Mathematical Physics**, vol. 10, nº 8, p.1458-1473, 1969.
- M. CERVERO, J.; D. LEJARRETA, J.S(2,1)-invariant systems and the Berry phase. **J. Phys. A: Math. Gen.** vol. 22, p. 663-666, 1989.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Introduction to Quantum Optics** (Gordon and Breach, N. Y.), 1973.
- PEDROSA, I. A. Complete Exact Quantum States of the Generalized Time-Dependent Harmonic Oscillator. **Modern Physics Letters B**, vol. 18, nº 24, p. 1267-1274, 2004.
- PERELOMOV, A. **Generalized Coherent States and Their Applications** (Berlin: Springer).
- WOLNEY FILHO, W. Mecânica Quântica: **Estados Coerentes**. Goiânia. Editora: da UFG, 2002. p. 192-202.
- YONG-DE, Z.; LEI, M. Berry's Phase for Coherent States. **IL Nuovo Cimento**, vol. 105 B, nº 12, p. 1343-1347.